

*早稲田大学国際教養学部 2005 年度数学

(表紙、空白ページ省略。注意書き等は例年通りです)

問 1. (1) 複素数平面上の 2 点を $A(z_1)$, $B(z_2)$ とする。また A を中心として, B を負の向きに 30° 回転した点を $C(z_3)$ とする。いま,
 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 4i$ のとき

$$z_3 = \frac{\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\sqrt{3}}{2} \right) i$$

である。また, 3 点 $w_k = (1 - i)z_k$ ($k = 1, 2, 3$) がつくる三角形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

(2)

$\sin x + \sin y = \frac{2}{3}$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2}$ のとき,

$$\sin x \sin y = -\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \quad \sin \frac{x+y}{2} = \pm \frac{\boxed{\text{コ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}$$

である。

(3) 10 ユーロ, 20 ユーロ, 50 ユーロの紙幣を使って支払いをする。ちょうど 50 ユーロを支払う方法は $\boxed{\text{シ}}$ 通りある。

また, ちょうど 200 ユーロの支払いをする方法は $\boxed{\text{ス}}$ $\boxed{\text{セ}}$ 通りある。

ただし, どの紙幣も十分な枚数を持っているものとし, 使わない紙幣があってもよいとする。

問 2. 座標平面上の集合

$$A = \{(x, y) | x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\},$$

$$B = \{(x, y) | y \geq 2\}$$

に対して, 集合

$$P_t = \{(x, y) | x^2 + y^2 < t\}$$

を考えると, 次の問いに答えよ。ただし, 次の ソ , タ には, それぞれの選択肢の中の 0 ~ のうちから正しい番号を選んで入れよ。

チ には, 正しい数を入れよ。

(1)

$(A \cap B) \cap P_t \neq \phi$ かつ $(A \cap B) \cap \bar{P}_t \neq \phi$ となる t の範囲は ソ である。

(選択肢)

0	$2 < t < 4$	$2 < t \leq 4$	$2 \leq t < 4$
	$2 \leq t \leq 4$	$4 < t < 16$	$4 < t \leq 16$
	$4 \leq t < 16$	$4 \leq t \leq 16$	

(2)

$A \cap \bar{B} \subset P_t$ となる t の範囲は タ である。

(選択肢)

0	$2\sqrt{2} < t$	$2\sqrt{2} \leq t$	$t < 2\sqrt{2}$
	$t \leq 2\sqrt{2}$	$8 < t$	$8 \leq t$
	$t < 8$	$t \leq 8$	

(3) $t = 8$ のとき, $A \cap B \subset \bar{P}_t$ の面積は チ である。

問3. 座標平面上に点 $P(0, p)$ を中心とする半径 p の円 C と2次曲線

$$Q: y = \frac{1}{4}x^2$$

がある。

(1) 円 C が2次曲線 Q と原点 O 以外で交わらないための条件は $p \leq$ である。

(2) $p >$ のときにこの円と2次曲線の交点の x 座標は

$$x = \pm \sqrt{\text{テ} p - \text{ト} \text{ナ}}$$

である。

(3) 2次曲線 Q と円 C の交点のうち x 座標が正となる点を A とするとき、

$\angle OPA < 90^\circ$ となるのは $p <$ のときである。

(4) $\angle OPA < 60^\circ$ となるのは

$$p = \frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$$

のときである。このとき、2本の直線 PO 、 AP と2次曲線 Q で囲まれた図形の面積は

$$\frac{\text{ノ} \text{ハ}}{\text{ヒ} \text{フ}} \sqrt{3}$$

となる。